Часть вторая

Неравновесная термодинамика

3. Кинематика

3.1. Понятие деформированного состояния

Рассмотрим сплошное тело, обладающее одним основным недеформированным состоянием, в котором материальные точки этого тела занимают область $B \equiv V \cup S$ физического пространства (рис. 1). Эта область может быть параметризована

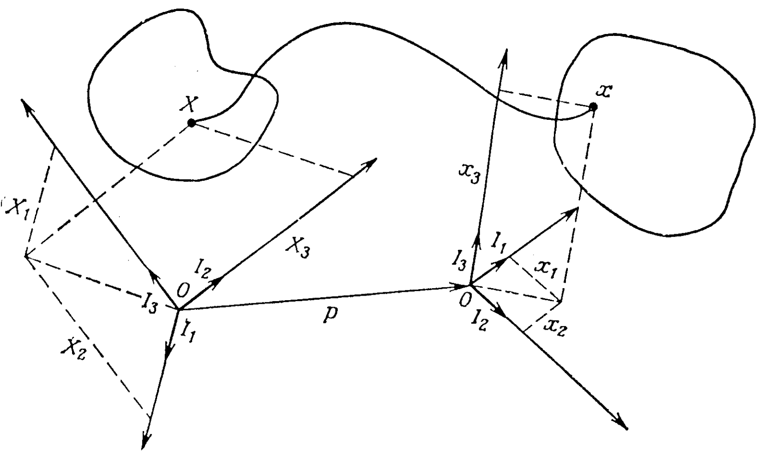

Рис. 1.

с помощью декартовой системы координат K, а каждая материальная точка $\mathbf{X} \in B$ может быть представлена однозначным образом своими координатами X_K:

$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{I}_1 + X_2\mathbf{I}_2 + X_3\mathbf{I}_3, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{I}_K$ — базисные векторы системы K. Координатную систему K принято называть материальной или лагранжевой.

Под действием различных по своей физической природе внешних или внутренних факторов тела меняют свои геометрические размеры, т. е. деформируются. Пусть в момент времени t тело находится в деформированном состоянии, в котором оно занимает область $b \equiv v \cup s$ (рис. 1) реального пространства. С помощью другой декартовой системы координат k материальные точки области b можно параметризовать так, чтобы каждая точка $\mathbf{x} \in b$ представлялась однозначным

образом своими координатами x_k:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{i}_k$ — базисные векторы системы k. Систему координат k называют пространственной, или эйлеровской.

При деформации материальные точки сохраняют свою индивидуальность и, следовательно, каждая точка из B преобразуется в точку из b:

$$x_k = x_k(X_K, t), \quad X_K \in B, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{3.3}$$

Обычно предполагают, что функция (3.3) и ее производные непрерывны в каждый момент $t \in [t_0, \infty)$ и в каждой точке $X \in B$, за исключением, может быть, только конечного числа точек, кривых и поверхностей.

В соответствии с одной из основных аксиом механики сплошных сред — аксиомой непрерывности — если две материальные точки области B бесконечно близки друг к другу, то они будут находиться бесконечно близко друг к другу и в области b. Отсюда следует, что конечные объемы в результате деформации не могут преобразоваться в точки. Необходимым и достаточным условием выполнения аксиомы непрерывности является отличие от нуля якобиана преобразования (3.3):

$$J = \det\{x_{k,K}\} \neq 0. \tag{3.4}$$

Величины $x_{k,K} = \partial x_k/\partial X_K$ называются градиентами деформации.

Из неравенства нулю якобиана (3.4) следует существование функции, обратной функции (3.3):

$$X_K = X_K(x_k, t), \quad x \in b, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{3.5}$$

Величины $X_{K,k} = \partial X_K/\partial x_k$ называют обратными градиентами деформации. Между величинами $X_{K,k}$ и $x_{k,K}$ существует соотношение

$$x_{k,K}X_{K,l} = \delta_{kl}, \quad x_{k,K}X_{L,k} = \delta_{KL}. \tag{3.6}$$

Необходимо отметить, что принцип непрерывности не всегда удовлетворяется для реальных тел. Например, при образовании трещин и разрушении тел материальные точки, находящиеся бесконечно близко в основном состоянии, удаляются на конечные расстояния. Другим примером нарушения принципа непрерывности является диффузия атомов и молекул, при которой материальные точки проникают в деформируемое тело.

С материальными точками исследуемого тела может быть связано заданное тензорное поле $\mathbf{F}$. Его можно определить на области b:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in b, \quad t \in [t_0, \infty),$$

или с помощью (3.3) на области B:

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}\in B, \quad t\in[t_0, \infty).$$

Материальной производной тензорной величины $\mathbf{F}$ называется оператор D/Dt, представляющий собой частную производную по t в области B:

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\Big|_{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X}\in B, \quad t\in[t_0, \infty). \tag{3.7}$$

Физический смысл материальной производной — скорость изменения наблюдаемой величины.

Материальная производная поля радиус-векторов материальных точек в области b представляет собой поле скоростей

$$v_k=\frac{D}{Dt}x_k(\mathbf{X}_K, t). \tag{3.8}$$

Для последующих рассуждений определенный интерес представляет материальная производная градиента деформации

$$\frac{D}{Dt}x_{k,K}=v_{k,K}=v_{k,l}x_{l,K}. \tag{3.9}$$

Из соотношений (3.6) и (3.9) определяем материальную производную обратного градиента деформации

$$\frac{D}{Dt}X_{K,k}=-v_{l,k}X_{K,l}. \tag{3.10}$$

Материальная производная якобиана J определяется из выражений (3.4), (3.6) и (3.9):

$$\frac{D}{Dt}J=\frac{\partial J}{\partial x_{k,K}}\frac{D}{Dt}x_{k,K}=JX_{K,k}\frac{D}{Dt}x_{k,K}=Jv_{k,k}. \tag{3.11}$$

С помощью (3.3) оператор материальной производной может быть определен и в области b:

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{F}(x_k, t)=\frac{D}{Dt}\mathbf{F}[x_k(X_K, t), t]=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}[x_k(X_K, t), t]\Big|_x+$$
$$+\mathbf{F}_{,k}\frac{D}{Dt}x_k=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}(x_m, t)+v_m\mathbf{F}_{,m}(x_k, t). \tag{3.12}$$

Если в области b задана интегральная величина

$$\mathbf{I}=\int_{\mathrm{v}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\,d\mathrm{v},$$

то под материальной производной $\mathbf{I}$ подразумевается величина

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{I}=\frac{D}{Dt}\int_{\mathrm{v}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\,d\mathrm{v}. \tag{3.13}$$

Поскольку тело находится в движении, область b, вообще говоря, не фиксирована во времени; поэтому оператор материальной производной не коммутирует с оператором интегрирования. С помощью преобразования (3.3) интеграл $\mathbf{I}$ можно задать на области B, которая в отличие от b является неподвижной. Это обеспечивает коммутативность этих двух операторов, а также дает возможность действовать оператором материальной производной под знаком интеграла непосредственно на подынтегральную функцию:

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{I}=\frac{D}{Dt}\int_{\mathrm{v}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\,d\mathrm{v}=\frac{D}{Dt}\int_{V}\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)J\,dV=$$
$$=\int_{V}\frac{D}{Dt}(\mathbf{F}J)\,dV=\int_{V}\left(\frac{D}{Dt}\mathbf{F}+\mathbf{F}v_{k,k}\right)J\,dV. \tag{3.14}$$

Переходя в последнем интеграле от интегрирования по области V к интегрированию по области v с помощью преобразования (3.5), получаем

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathrm{v}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\,d\mathrm{v}=\int_{\mathrm{v}}\left(\frac{D}{Dt}\mathbf{F}+\mathbf{F}v_{k,k}\right)d\mathrm{v}. \tag{3.15}$$

С помощью соотношения (3.12) равенство (3.15) можно представить в виде

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathrm{v}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\,d\mathrm{v}=\int_{\mathrm{v}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}+(\mathbf{F}v_k)_{,k}\right]d\mathrm{v}. \tag{3.16}$$

Оператор материальной производной будет в дальнейшем обозначаться точкой над соответствующей величиной.

3.2. Тензоры деформации

Движение сплошной материальной среды может быть параметризировано с помощью уравнений типа (3.3) и (3.5). Но не каждое движение приводит к деформации тела. Например, при чистом вращении и трансляции расстояния между материальными точками не меняются и, следовательно, тела не испытывают деформации. Поэтому величины, с помощью которых параметризуют состояния деформации исследуемого тела, должны быть инвариантами групп вращения и трансляции.

Пусть исследуемое тело совершает движение, которое отличается от деформации (3.3) произвольным вращением и трансляцией в пространстве и, кроме того, трансляцией во времени:

$$\tilde{x}_l(t^*)=Q_{lm}(t)\,x_m(t)+b_l(t), \quad t^*=t+a,$$
$$Q_{lm}Q_{mk}=\delta_{lk}, \quad \det\{Q_{lm}\}=1, \tag{3.17}$$

где b_l — вектор, а a — скаляр. Все движения, связанные соотношениями (3.17), называются эквивалентными.

Из соотношений (3.17) следует, что градиент деформации не инвариантен по отношению к вращению

$$\tilde{x}_{l,K} = Q_{lm}x_{m,K} \tag{3.18}$$

и, следовательно, не может быть использован для параметризации состояния деформации рассматриваемой среды. Аналогичный результат получается для обратного градиента деформации. Известно [136], что каждый тензор второго ранга **B** с положительным детерминантом допускает полярное разложение, при котором он однозначно представляется в виде произведения ортогонального тензора **R** и симметричного положительно определенного тензора **U**:

$$B_{kl} = R_{km}U_{ml}. \tag{3.19}$$

В уравнении (3.19) тензор U_{ml} инвариантен по отношению к группе ортогональных поворотов. Это обстоятельство наводит на мысль, что если аналогично (3.19) разложить градиент деформации, то из него можно выделить некоторую вполне определенную величину, с помощью которой можно осуществить однозначную параметризацию состояния деформации рассматриваемого тела. Необходимо отметить, что градиенты деформации не являются тензорными величинами, поскольку их тензорные индексы k и K связаны с двумя различными координатными системами. С помощью ортогональных матриц

$$g_{kK} = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{I}_K \tag{3.20}$$

они могут быть спроецированы в одну из двух координатных систем:

$$x_{K,L} = g_{kK}x_{k,L}, \tag{3.21}$$

$$X_{k,l} = g_{kK}X_{K,l}. \tag{3.22}$$

Здесь $x_{K,L}$ и $X_{k,l}$ — тензорные величины, и, следовательно, для них возможно разложение (3.19):

$$x_{K,L} = R_{KM}U_{ML}, \tag{3.23}$$

$$X_{k,l} = r_{km}u_{ml}. \tag{3.24}$$

С другой стороны, ясно, что если с помощью величин U_{ML}, u_{ml} можно параметризовать состояние деформации, то это можно сделать и с помощью величин

$$C_{KL} = U_{MK}U_{ML}, \tag{3.25}$$

$$c_{kl} = u_{mk}u_{ml}, \tag{3.26}$$

которые представляют собой соответственно тензоры конечной деформации Грина и Коши. Они связаны с градиентами деформации посредством равенств

$$C_{KL} = U_{MK}U_{ML} = R_{MN}x_{N,K}R_{MS}x_{S,L} = R_{MN}R_{MS}g_{nN}g_{sS}x_{n,K}x_{s,L} = \\ = \delta_{NS}g_{nN}g_{sS}x_{n,K}x_{s,L} = g_{nN}g_{sN}x_{n,K}x_{s,L} = \delta_{ns}x_{n,K}x_{s,L} = x_{k,K}x_{k,L}, \tag{3.27}$$

$$c_{kl} = u_{mk}u_{ml} = r_{mn}X_{n,k}r_{ms}X_{s,l} = r_{mn}r_{ms}X_{n,k}X_{s,l} = \\ = g_{nN}g_{nS}X_{N,k}X_{S,l} = \delta_{NS}X_{N,k}X_{S,l} = X_{N,k}X_{N,l}. \tag{3.28}$$

В случае тождественности основного и деформированного состояний тензоры деформации Грина и Коши сводятся к единичным тензорам

$$C_{KL} = \delta_{KL}, \quad c_{kl} = \delta_{kl}. \tag{3.29}$$

В определенных случаях удобно, чтобы тензоры деформации обращались в нуль при «нулевой» деформации. Это условие выполнено для тензоров деформации Лагранжа E_{KL} и

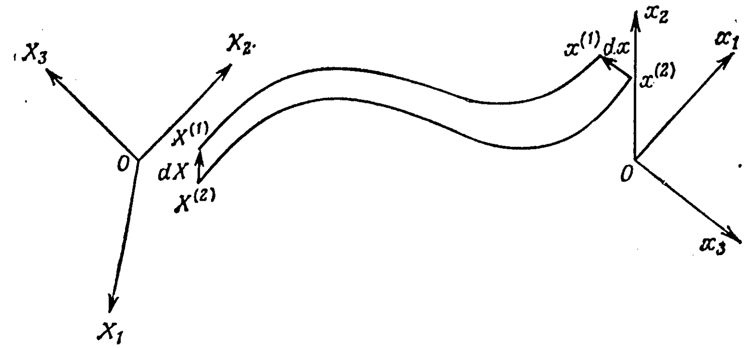

Рис. 2.

Эйлера $\tilde{E}_{kl}$, которые связаны с тензорами C_{KL} и c_{kl} равенствами

$$E_{KL} = \frac{1}{2}(C_{KL} - \delta_{KL}), \quad \tilde{E}_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{kl} - c_{kl}). \tag{3.30}$$

Геометрический смысл определенных таким образом тензоров деформации можно понять, если рассмотреть изменение длины бесконечно малого вектора при переходе тела из основного состояния в деформированное (рис. 2). Квадрат расстояния между точками $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ в деформированном состоянии, которые в основном состоянии тела занимают положения $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, можно выразить с помощью координат направленного отрезка $X^{(1)} - X^{(2)}$:

$$ds^2 = dx_k\,dx_k = x_{k,K}x_{k,L}\,dX_K\,dX_L = C_{KL}\,dX_K\,dX_L, \tag{3.31}$$

$$dX_K = X_K^{(1)} - X_K^{(2)}.$$

Из этого равенства видно, что если область b параметризовать с помощью материальных координат, то тензор деформации Грина будет метрическим тензором в этой области.

Аналогично тензор деформации Коши можно рассматривать как метрический тензор в области B:

$$dS^2 = dX_K\,dX_K = X_{K,k}X_{K,l}\,dx_k\,dx_l = c_{kl}\,dx_k\,dx_l. \qquad (3.32)$$

Изменение расстояния между точками $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ при переходе тела из основного в деформированное состояние представляется уравнениями

$$ds^2 - dS^2 = dx_k\,dx_k - dX_K\,dX_K = (x_{k,K}x_{k,L} - \delta_{KL})\,dX_K\,dX_L = 2E_{KL}\,dX_K\,dX_L, \qquad (3.33)$$

$$ds^2 - dS^2 = dx_k\,dx_k - dX_K dX_K = (\delta_{kl} - X_{K,k}X_{K,l})\,dx_k\,dx_l = 2\tilde{E}_{kl}\,dx_k\,dx_l. \qquad (3.34)$$

При деформации любая материальная точка перемещается в пространстве. Векторное поле, определенное равенством

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} + \mathbf{p}, \qquad (3.35)$$

представляет собой поле перемещений (рис. 1).

Если x_k, определенное равенством (3.35), подставить в выражения для тензоров деформации Грина и Коши (3.27), (3.28), то получим

$$C_{KL} = (U_{K,L} + U_{L,K} + U_{K,M}U_{M,L} + \delta_{KL}), \qquad (3.36)$$

$$c_{kl} = (\delta_{kl} - u_{k,l} - u_{l,k} - u_{k,m}u_{m,l}). \qquad (3.37)$$

С помощью соотношений (3.36), (3.37) выражения для тензоров деформации Лагранжа и Эйлера можно записать в виде

$$E_{KL} = \frac{1}{2}(U_{K,L} + U_{L,K} + U_{K,M}U_{M,L}), \qquad (3.38)$$

$$\tilde{E}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k} + u_{k,m}u_{m,l}). \qquad (3.39)$$

Отсюда видно, что выражения для тензоров деформации Лагранжа и Эйлера содержат член, который нелинеен по отношению к градиентам поля перемещений. При малых деформациях этим членом можно пренебречь. Полученный таким образом тензор называется тензором бесконечно малой деформации

$$\varepsilon_{KL} = \frac{1}{2}(u_{K,L} + u_{L,K}). \qquad (3.40)$$

В этом случае целесообразно, чтобы материальная и пространственная системы координат совпадали. Поэтому выражения (3.38) и (3.39) приводят к виду, соответствующему одному и тому же тензору бесконечно малой деформации.

3.3. Микродеформация. Тензоры микродеформации

Реальные тела в микроскопическом масштабе являются неоднородными (негомогенными). Они обладают сложной композиционной структурой. При определенных условиях микродвижения отдельных микроэлементов оказывают влияние на макроскопическое поведение тела. В этих случаях необходимо рассматривать дополнительные кинематические поля. Изложим кинематику микронегомогенных сред в варианте, предложенном Ерингеном [55, 57—59].

Допустим, что элементарный объем $dv \subset b$ занят n микроэлементами, каждый из котрых можно параметризовать с помощью микрокоординат $\xi^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, заданных в системе координат, неподвижно связанной с центром масс элементарного объема dv. Между материальными микрокоординатами $\zeta_K^{(\alpha)}$ и пространственными микрокоординатами $\xi_k^{(\alpha)}$ существует связь:

$$\xi_k^{(\alpha)} = \xi_k^{(\alpha)}(X_K, \zeta_K^{(\alpha)}, t). \qquad (3.41)$$

Микрокоординаты $\zeta_K^{(\alpha)}$ являются малыми величинами, и выражение (3.41) можно разложить в ряд Тейлора с точностью до величин первого порядка по $\zeta_K^{(\alpha)}$:

$$\xi_k^{(\alpha)} = \chi_{kK}^{(\alpha)}(X_L, t)\,\zeta_K^{(\alpha)}, \qquad (3.42)$$

где

$$\chi_{kK}^{(\alpha)} = \left.\frac{\partial \xi_k^{(\alpha)}}{\partial \zeta_K^{(\alpha)}}\right|_{\zeta_K^{(\alpha)}=0}.$$

Величина $\chi_{kK}^{(\alpha)}$ называется матрицей микродвижения. Уравнение (3.42) можно разрешить по отношению к материальным микрокоординатам

$$\zeta_K^{(\alpha)} = \varkappa_{Kk}^{(\alpha)}\xi_k^{(\alpha)}, \qquad (3.43)$$

где $\varkappa_{Kk}^{(\alpha)}$ — обратная матрица микродвижения. Между прямой и обратной матрицами микродвижения существует соотношение

$$\chi_{kK}^{(\alpha)}\varkappa_{Kl}^{(\alpha)} = \delta_{kl}, \quad \chi_{kK}^{(\alpha)}\varkappa_{Lk}^{(\alpha)} = \delta_{KL}. \qquad (3.44)$$

С помощью микрокоординат элемента объема dv (3.3) и микрокоординат (3.42) получаем координаты микроэлемента

$$x_k^{(\alpha)} = x_k(X_L, t) + \chi_{kK}^{(\alpha)}(X_L, t)\,\zeta_K^{(\alpha)} \qquad (3.45)$$

Согласно (3.45), квадрат длины элементарной дуги равен

$$(ds^{(\alpha)})^2 = (C_{KL} + 2\Gamma_{KML}^{(\alpha)}\zeta_M^{(\alpha)} + \chi_{kM,K}^{(\alpha)}\chi_{kN,L}^{(\alpha)}\zeta_M^{(\alpha)}\zeta_N^{(\alpha)})\,dX_K\,dX_L + 2(\psi_{KL}^{(\alpha)} + \chi_{kL}^{(\alpha)}\chi_{kM,K}^{(\alpha)}\zeta_M^{(\alpha)})\,dX_K\,d\zeta_L^{(\alpha)} + \chi_{kK}^{(\alpha)}\chi_{kL}^{(\alpha)}\,d\zeta_K^{(\alpha)}\,d\zeta_L^{(\alpha)}, \qquad (3.46)$$

где

$$\psi^{(\alpha)}_{KL}=x_{k,K}\chi^{(\alpha)}_{kL},\quad \Gamma^{(\alpha)}_{KLM}=x_{k,K}\chi^{(\alpha)}_{kL,M} \tag{3.47}$$

являются тензорами микродеформации.

В теории микроконтинуума, развитой Ерингеном, рассматривается случай, когда все микроэлементы характеризуются одним и тем же микродвижением:

$$\chi^{(\alpha)}_{kK}=\chi_{kK},\quad \alpha=1, 2,\ldots, n. \tag{3.48}$$

Однако с физической точки зрения представляется возможной ситуация, когда каждый микроэлемент характеризуется своим индивидуальным микродвижением.

Если микроэлементы являются недеформируемыми, микродвижения представляются ортогональными матрицами

$$\chi^{(\alpha)}_{kK}=(\chi^{(\alpha)}_{kK})^{-1}. \tag{3.49}$$

Микрополярными средами называют тела с одним микроэлементом, микродвижение которого представляется уравнениями

$$\xi=\zeta-\zeta\times\boldsymbol{\Phi},\quad \zeta=\xi+\xi\times\boldsymbol{\phi}, \tag{3.50}$$

где Φ и $\boldsymbol{\phi}$ · векторы пространственного микровращения. В линейной теории $\Phi\approx\boldsymbol{\phi}$. В координатной записи уравнения (3.50) имеют вид

$$\begin{aligned}\xi_k&=g_{kK}\zeta_K-e_{klm}g_{lL}g_{mM}\zeta_L\Phi_M,\\ \zeta_K&=g_{kK}\xi_k+e_{KLM}g_{lL}g_{mM}\xi_l\varphi_m.\end{aligned} \tag{3.51}$$

С помощью уравнений (3.41), (3.42) и (3.51) получаем матрицы микродвижения

$$\begin{aligned}\chi_{kK}&=g_{kK}-e_{klm}g_{lK}g_{mM}\Phi_M,\\ \chi_{Kk}&=g_{kK}+e_{KLM}g_{kL}g_{mM}\varphi_m.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Из определяющих уравнений (3.47) и уравнений (3.52) получаем следующие выражения для тензоров микродеформации:

$$\begin{aligned}\psi_{KL}=x_{k,K}(g_{kL}-e_{klm}g_{lL}g_{mM}\Phi_M)=(g_{kK}+u_{k,K})\times\\ \times(g_{kL}-e_{klm}g_{lL}g_{mM}\Phi_M)=\delta_{KL}+u_{L,K}-e_{KLM}\Phi_M-\\ -e_{RLM}u_{R,K}\Phi_M,\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{KLM}=x_{k,K}\chi_{kL,M}=(g_{kK}+u_{k,K})\,e_{klm}g_{lL}g_{mN}\Phi_{N,M}=\\ =e_{KLN}\Phi_{N,M}+e_{RLM}u_{R,K}\Phi_{N,M}.\end{aligned} \tag{3.54}$$

В линейном варианте теории квадратичными членами можно пренебречь:

$$\psi_{KL}=\delta_{KL}+u_{L,K}-e_{KLM}\Phi_M, \tag{3.55}$$

$$\Gamma_{KLM}=e_{KLN}\Phi_{N,M}. \tag{3.56}$$