9. Термодинамическая модель механической среды с внешним управлением

9.1. Основные термодинамические зависимости

Механической средой с внешним управлением мы называем сплошную среду, которая под действием некоторых внешних факторов может изменять свои реологические свойства и механическое состояние. Примерами подобных сред являются: тела, находящиеся под воздействием ионизирующей радиации, которая вызывает фотохимические реакции и приводит к обратимым и необратимым микроструктурным изменениям; полимерные тела при квазистатической нагрузке, находящиеся под дополнительным вибрационным воздействием: биологические ткани, которые в организме находятся под воздействием различных физиологических факторов биоэлектрической и биомеханической природы (мышечная ткань, которая может сокращаться при воздействии электрического сигнала). Некоторые частные случаи сред с внешним управлением рассмотрены в работах [16, 31, 33].

Допустим, что внешнее управление может быть параметризовано с помощью модельной функции γ, которая зависит, кроме времени t, также от определенного числа параметров $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, характеризующих внешнее воздействие. Допустим также, что γ является скалярной, непрерывной и положительной функцией. В случае отсутствия управления $\gamma \equiv 0$.

Согласно первому и второму началам термодинамики, для простого материала в случае среды с внешним управлением имеем

$$\rho \frac{D}{Dt} e = \frac{1}{2} t_{kl} X_{K,k} X_{L,l} \frac{D}{Dt} C_{KL} + h_{k,k} + \rho \overset{*}{e} + \tilde{e}, \qquad (9.1)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \eta - \left(\frac{h_k}{\theta}\right)_{,k} - \rho \frac{\overset{*}{e}}{\theta} - \tilde{\eta} \geqslant 0,$$

где $\tilde{e}$ и $\tilde{\eta}$ представляют собой соответственно внутреннюю энергию и энтропию, которые вносятся в единицу объема управляющим сигналом.

С помощью определения плотности свободной энергии

$$\psi = e - \theta\eta \qquad (9.2)$$

и первого начала термодинамики $(9.1)_1$ диссипативное неравенство $(9.1)_2$ можно преобразовать к виду

$$\rho\left(\frac{D}{Dt}\psi + \eta \frac{D}{Dt}\theta\right) - \frac{1}{2} t_{kl} X_{K,k} X_{L,l} \frac{D}{Dt} C_{KL} - \frac{\theta_{,k} h_k}{\theta} - \tilde{\psi} \leqslant 0, \qquad (9.3)$$

где величину $\tilde{\psi} = \tilde{e} - \theta\tilde{\eta}$ можно рассматривать как плотность свободной энергии, которая вносится управляющим сигналом. При отсутствии управления $\gamma = 0 \Rightarrow \tilde{\psi} = 0$.

9.2. Определяющие уравнения

В качестве основных локальных термодинамических параметров примем величины

$$C_{KL};\ \theta;\ \theta_{,K};\ \gamma;\ \mathbf{R}^{(l)},\quad l = 1, 2, \ldots, N. \qquad (9.4)$$

где $\mathbf{R}^{(l)}$ — N внутренних параметров разной тензорной размеренности, с помощью которых моделируется неупругое поведение рассматриваемой деформируемой среды.

В наиболее общем виде определяющие уравнения могут быть представлены соотношениями

$$\begin{gathered}
\psi = \psi(C_{MN};\ \theta;\ \theta_{,N};\ \mathbf{R}^{(l)};\ \gamma),\\
t_{mn} = \tilde{T}_{KL}(C_{MN};\ \theta;\ \theta_{,N};\ \mathbf{R}^{(l)};\ \gamma)\, x_{m,K} x_{l,L},\\
\eta = \eta(C_{MN};\ \theta;\ \theta_{,N};\ \mathbf{R}^{(l)};\ \gamma),\\
h_k = \tilde{h}_K(C_{MN};\ \theta;\ \theta_{,N};\ \mathbf{R}^{(l)};\ \gamma)\, x_{k,K},\\
\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(C_{MN};\ \theta;\ \theta_{,N};\ \mathbf{R}^{(l)};\ \gamma),\\
\frac{D}{Dt}\mathbf{R}^{(m)} = \mathbf{g}^{(m)}(C_{MN};\ \theta;\ \theta_{,N};\ \mathbf{R}^{(l)};\ \gamma),\\
\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(C_{MN};\ \theta;\ \theta_{,N};\ \mathbf{R}^{(l)};\ \gamma),\quad m,\ l = 1, 2, \ldots, N.
\end{gathered} \qquad (9.5)$$

С помощью соотношения $(9.5)_1$ диссипативное неравенство (9.3) можно представить в виде

$$\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\right)\frac{D}{Dt}\theta + \rho\frac{\partial\psi}{\partial\theta_{,K}}\frac{D}{Dt}\theta_{,K} + \sum_{l=1}^{N}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}^{(l)}}\cdot\mathbf{g}^{(l)} + \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial C_{KL}} - \frac{1}{2\rho}t_{kl}X_{K,k}X_{L,l}\right)\frac{D}{Dt}C_{KL} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\frac{D}{Dt}\gamma - \frac{\theta_{,k}h_k}{\theta} - \tilde{\psi} \leqslant 0. \qquad (9.6)$$

Необходимые и достаточные условия справедливости неравенства (9.6) при сделанных выше предположениях (9.5) имеют вид

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta_{,K}} = \frac{\partial\psi}{\partial\gamma} = 0, \quad t_{kl} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial C_{KL}} x_{k,K} x_{l,L},$$
$$\sum_{l=1}^{N} \rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}^{(l)}}\cdot\mathbf{g}^{(l)} - \tilde\psi - \frac{\theta_{,k}h_k}{\theta} \leqslant 0. \tag{9.7}$$

Разложим величины $\mathbf{g}^{(l)}$, $\tilde\psi$ и h_k в ряд по степеням γ, учитывая, что $\tilde\psi\to 0$ при $\gamma\to 0$:

$$\tilde\psi = \sum_{m=1}^{\infty}\tilde\psi^{(m)}(C_{MN};\theta;\theta_{,N};\mathbf{R}^{(l)})\gamma^m,$$
$$\mathbf{g}^{(l)} = \sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{g}^{(lm)}(C_{MN};\theta;\theta_{,N};\mathbf{R}^{(l)})\gamma^m, \tag{9.8}$$
$$h_k = \sum_{m=0}^{\infty}h^{(m)}(C_{MN};\theta;\theta_{,N};\mathbf{R}^{(l)})\gamma^m.$$

Подставляя разложения (9.8) в неравенство (9.7), получаем

$$\sum_{l=1}^{N}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}^{(l)}}\cdot\mathbf{g}^{(l_0)} - \frac{\theta_{,k}h_k^{(0)}}{\theta} - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{N}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}^{(l)}}\cdot\mathbf{g}^{(lm)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\theta_{,K}h_k^{(m)}}{\theta} - \tilde\psi^m\right)\gamma^m \leqslant 0. \tag{9.9}$$

Поскольку первые два члена в этом неравенстве не зависят от управляющего сигнала, имеют место следующие два неравенства:

$$\sum_{l=1}^{N}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}^{(l)}}\cdot\mathbf{g}^{(l0)} - \theta_{,k}h_k^{(0)} \leqslant 0, \tag{9.10}$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{N}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}^{(l)}}\cdot\mathbf{g}^{(lm)} - \frac{\theta_{,k}h_k^{(m)}}{\theta} - \tilde\psi^{(m)}\right)\gamma^m \leqslant 0.$$

В наиболее общем случае изменения внутренних параметров оказывают влияние на перенос тепла, так как с их помощью учитывается структурное состояние среды. Однако мы пренебрежем этим эффектом, так как он является «связанным» и, следовательно, более слабым по сравнению с основными эффектами. Поэтому неравенство $(9.10)_1$ распадается на неравенства

$$\sum_{l=1}^{N}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}^{(l)}}\cdot\mathbf{g}^{(l0)} \leqslant 0, \quad \theta_{,k}h_k^{(0)} \geqslant 0. \tag{9.11}$$

В случае теории, линейной по отношению к управляющему сигналу, из неравенства $(9.10)_2$ получаем

$$\tilde\psi^{(1)} \geqslant \sum_{l=1}^{N}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}^{(l)}}\cdot\mathbf{g}^{(l1)} - \frac{\theta_{,k}h_k^{(1)}}{\theta}. \tag{9.12}$$

Если управляющий сигнал не оказывает прямого влияния на перенос тепла, то величиной $h_k^{(1)}$ в неравенстве (9.12) следует пренебречь, причем в этом случае получаем, что внесенная извне свободная энергия $\tilde\psi$ не расходуется только на внутренние структурные изменения:

$$\tilde\psi^{(1)} \geqslant \sum_{l=1}^{N}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}^{(l)}}\mathbf{g}^{(l1)}. \tag{9.13}$$

9.3. Линейная теория

В линейном варианте излагаемой нами теории примем, что плотность свободной энергии является квадратичной функцией тензора бесконечно малой деформации, температуры и внутренних параметров:

$$\rho\psi = \frac{1}{2}A_{klmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + \frac{1}{2}\sum_{l,\,m=1}^{N}\mathbf{B}^{(lm)}\cdot(\mathbf{R}^{(l)}\otimes\mathbf{R}^{(m)}) + \sum_{l=1}^{N}\mathbf{K}_{km}^{(l)}\varepsilon_{km}\times$$
$$\times\mathbf{R}^{(l)} + \frac{1}{2}C(\theta-\theta_0)^2 + N_{kl}\varepsilon_{kl}(\theta-\theta_0) + \sum_{l=1}^{N}\mathbf{F}^{(l)}\cdot\mathbf{R}^{(l)}(\theta-\theta_0). \tag{9.14}$$

После подстановки выражения (9.14) в уравнения $(9.17)_{1,3}$ получаем

$$t_{kl} = A_{klmn}\varepsilon_{mn} + N_{kl}(\theta-\theta_0) + \sum_{m=1}^{N}\mathbf{K}_{kl}^{(m)}\cdot\mathbf{R}^{(m)},$$
$$-\rho_0\eta = N_{mn}\varepsilon_{mn} + C(\theta-\theta_0) + \sum_{l=1}^{N}\mathbf{F}^{(l)}\cdot\mathbf{R}^{(l)}. \tag{9.15}$$

В линейном варианте теории необходимым и достаточным условием справедливости неравенств (9.11) является существование следующих линейных зависимостей:

$$g^{(l0)} = \sum_{m=1}^{N}\mathbf{L}^{(ml)}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{R}^{(m)}}, \quad h_k^{(0)} = \lambda_{kl}\theta_{,l}, \tag{9.16}$$

где $\{\mathbf{L}^{(lm)}\}$ — неположительно определенная матрица, а $\{\lambda_{kl}\}$ — неотрицательно определенная матрица. После подстановки уравнения (9.14) в $(9.16)_1$ получаем

$$\mathbf{g}^{(l0)} = \widetilde{\mathrm{K}}^{(l)}_{km}\varepsilon_{km} + \sum_{m=1}^{N} \widetilde{\mathbf{B}}^{(lm)} \cdot \mathbf{R}^{(m)} + \widetilde{\mathbf{F}}^{(l)}(\theta - \theta_0), \qquad (9.17)$$

где

$$\widetilde{\mathrm{K}}^{(l)}_{km} = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{L}^{(lr)} \cdot \mathrm{K}^{(r)}_{km}, \quad \widetilde{\mathbf{F}}^{(l)} = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{L}^{(lr)} \cdot \mathbf{F}^{(r)}, \quad \widetilde{\mathbf{B}}^{(lm)} = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{L}^{(lr)} \cdot \mathbf{B}^{(rm)}. \qquad (9.18)$$

9.4. Применение теории сред с внешним управлением для моделирования процессов вибрационной ползучести

Рассмотрим одномерное линейное вязкоупругое тело, находящееся под воздействием внешней нагрузки, представляющей собой суперпозицию одной квазистатической и одной динамической гармонических составляющих:

$$P(t) = \bar{P}(t) + P_0 \sin \omega t. \qquad (9.19)$$

В силу соотношения (9.19) одномерное напряжение и одномерная деформация могут быть представлены в виде

$$\sigma(t) = \bar{\sigma}(t) + \sigma_0 \sin \omega t, \quad \varepsilon(t) = \bar{\varepsilon}(t) + \varepsilon_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (9.20)$$

где $\bar{\sigma}(t)$ и $\bar{\varepsilon}(t)$ представляют собой квазистатические функции времени. Наша цель состоит в построении термодинамической модели, описывающей квазистатическую часть процесса, при котором воздействие вибрации учитывается модельным образом с помощью управляющего параметра γ, который является функцией величин σ_0 и ω.

Рассмотрим термоизолятор, для которого обменом тепла с окружающей средой за время эксперимента можно пренебречь. Это условие действительно выполняется на практике в случае твердых полимерных материалов. Структурное состояние тела мы параметризуем величиной c. На основе представленного линейного варианта теории и сделанных выше предположений приходим к одномерным определяющим уравнениям вида

$$\bar{\sigma} = E\bar{\varepsilon} + Kc, \quad \frac{D}{Dt}c = \tilde{B}c + \tilde{K}\bar{\varepsilon} + \delta\gamma, \quad \delta = \beta\bar{\varepsilon} + rc + m, \qquad (9.21)$$

где E, K, $\tilde{B}$, $\tilde{K}$, r и m — константы. После исключения структурного параметра из уравнений (9.21) получаем обобщение модели Зинера

$$\frac{D}{Dt}\bar{\sigma} + \tilde{\lambda}_1\bar{\sigma} = E\left(\frac{D}{Dt}\bar{\varepsilon} + \tilde{\lambda}_2\bar{\varepsilon}\right) + \tilde{m}, \qquad (9.22)$$

в котором реологические коэффициенты являются линейными функциями управляющего сигнала:

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1^0 - s\gamma, \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2^0 - (\beta K - rE)\gamma}{E},$$
$$\tilde{m} = m\gamma, \quad \lambda_1^0 = -B, \quad \tilde{\lambda}_2^0 = \frac{(K\breve{K} - \widetilde{B}E)}{E}. \qquad (9.23)$$

Полученные теоретические результаты находятся в соответствии с экспериментальными исследованиями и эмпирическими моделями, предложенными в работе [21], где принято, что управляющий сигнал пропорционален произведению частоты и амплитуды приложенного вибрационного воздействия ($\gamma \sim \sigma_0\omega$).