

5. Определяющие уравнения

5.1. Об аксиоматизации механики сплошных сред

Развитие математики и ее значительное проникновение в естественные науки в наше время стимулировало интерес некоторых ученых-математиков к проблеме возможности аксиоматизации естественных наук, в частности механики, и превращение их в соответствующие разделы математики. Идея аксиоматической структуры физики связана с именем Гильберта и представляет собой одну из основных проблем, завещанных им для решения будущим поколениям исследователей. В области механики сплошных сред наибольший интерес представляют попытки аксиоматизации, предпринятые Ноллом.

Основные принципы, которые мы использовали в своем изложении до сих пор, следующие:

1. Принцип непрерывности.
2. Принцип существования основного состояния (нулевой закон термодинамики).
3. Принцип объективности.
4. Принцип локальности.
5. Закон сохранения массы.
6. Закон сохранения количества движения.
7. Закон сохранения момента количества движения.
8. Первое начало термодинамики.
9. Второе начало термодинамики.

Нолл принимает перечисленные принципы в качестве аксиом, добавляя к ним аксиомы, связанные с математическим уточнением таких понятий, как теплота, масса, сила, система.

Интересен вопрос о том, образуют ли упомянутые принципы (аксиомы) замкнутую систему. Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим систему математических зависимостей, которые следуют из основных принципов в случае простой неполярной среды. Из уравнений, представляющих законы сохранения, и неравенства Клаузиуса—Дюгема имеем

$$\rho_0 = J\rho, \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} v_k = t_{lk, l} + \rho f_k, \quad (5.2)$$

$$t_{kl} = t_{lk}, \quad (5.3)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} e = t_{kl} v_{l, k} + h_{k, k} + \rho \dot{e}, \quad (5.4)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \eta - \left(\frac{h_k}{\theta} \right)_{, k} - \rho \frac{\dot{e}}{\theta} \geq 0. \quad (5.5)$$

Так как число неизвестных переменных 22, а в нашем распоряжении только 8 уравнений и одно неравенство, представленные принципы-аксиомы не в состоянии предложить замкнутую математическую систему.

Интуитивно ясно, что различные материалы реагируют различным образом на одно и то же механическое воздействие. С другой стороны, в фундаментальных законах (5.1)—(5.5) не содержится никаких параметров, характеризующих конкретный материал. Поэтому к зависимостям (5.1)—(5.5) следует добавить определенное число уравнений состояния, в которых учтены специфические физические свойства рассматриваемого тела. В термодинамике сплошных сред эти уравнения называются определяющими уравнениями. В связи с попытками аксиоматизации механики сплошных сред можно было бы допустить, что они подчиняются замкнутой системе аксиом. Однако до сих пор попытки исследователей продвинуться в этом направлении оказались безуспешными. Причина, по нашему мнению, состоит в том, что механическое поведение тел отражает физическую структуру материала, которая, согласно диалектическому мировоззрению, неисчерпаема. Типичным примером в этом отношении является то обстоятельство, что один и тот же материал при различных механических воздействиях описывается различными моделями (определяющими уравнениями), т. е. при этом проявляются различные физические факторы.

Так как путь познания состоит в открытии новых закономерностей и уточнении существующих законов, мы обязаны учитывать все большее и большее число элементов, связанных с физической структурой тел. По нашему мнению, неудачи попыток аксиоматизации являются следствием «структурной бесконечности материи». Однако независимо от этого замечания попытки аксиоматизации внесли довольно большой вклад в построение внутренней логики науки, которая называется теперь механикой сплошных сред.

5.2. Основные принципы, которым подчиняются определяющие уравнения

Как уже отмечалось, определяющие уравнения выражают физическую структуру материалов, которая неисчерпаема. По этой причине совокупность математических связей, которые могут представлять собой определяющие уравнения, очень богата. Однако, несмотря на это, они не могут быть совершенно произвольными и подчиняются некоторым основным принципам: принципу взаимной связи, нулевому началу тер-

всех эквивалентных движениях, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{kl} &= \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{I}_{kl} [Q_{nm} x_{m, N}(s); \theta(s); Q_{nm} \theta_{, m}(s)], \\ \tilde{h}_k &= \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{Y}_k [Q_{nm} x_{m, N}(s); \theta(s); Q_{nm} \theta_{, m}(s)], \\ \tilde{e} &= \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{E} [Q_{nm} x_{m, N}(s); \theta(s); Q_{nm} \theta_{, m}(s)], \\ \tilde{\eta} &= \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{H} [Q_{nm} x_{m, N}(s); \theta(s); Q_{nm} \theta_{, m}(s)]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

С помощью соотношений (5.10) — (5.12) получаем следующие ограничения на определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} t_{kl} &= Q_{kr} Q_{lp} \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{I}_{rp} [Q_{nm} x_{m, N}(s); \theta(s); Q_{nm} \theta_{, m}(s)], \\ h_k &= Q_{kr} \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{Y}_r [Q_{nm} x_{m, N}(s); Q(s); Q_{nm} \theta_{, m}(s)], \\ e &= \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{E} [Q_{nm} x_{m, N}(s); \theta(s); Q_{nm} \theta_{, m}(s)], \\ \eta &= \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{H} [Q_{nm} x_{m, N}(s); \theta(s); Q_{nm} \theta_{, m}(s)]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Уравнения (5.13) должны выполняться при любой, произвольно зависящей от времени ортогональной матрице $Q_{lm}(s)$. Из полярного разложения деформационного градиента (3.23), (3.24) и равенства (3.25) получаем, что необходимое и достаточное условие того, что ограничения (5.13) будут удовлетворены при произвольном эквивалентном движении, состоит в том, чтобы определяющие уравнения были представимы в виде

$$\begin{aligned} t_{kl} &= \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{I}_{NM} [C_{KL}(s); \theta(s); x_{k, K} \theta_{, k}(s)] x_{k, N} x_{l, M}, \\ h_k &= \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{Y}_N [C_{KL}(s); \theta(s); x_{k, K} \theta_{, k}(s)] x_{k, N}, \\ e &= \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{E} [C_{KL}(s); \theta(s); x_{k, K} \theta_{, k}(s)], \\ \eta &= \int_{s=-\infty}^{s=t} \mathfrak{H} [C_{KL}(s); \theta(s); x_{k, K} \theta_{, k}(s)]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

6. Принцип материальной симметрии близок по смыслу к принципу объективности. Согласно этому принципу, определяющие уравнения должны быть инвариантны по отношению

ко всем преобразованиям в лагранжевой системе координат, при которых не меняется симметрия материальной среды. Существенным отличием между двумя принципами является то, что в принципе объективности ограничения на определяющие уравнения вытекают из свойств пространства и времени, тогда как в принципе материальной симметрии ограничения вытекают из свойств материала, из которого построено исследуемое тело. Уравнение

$$\tilde{X}_K = \tilde{R}_{KL} X_L + R_K \quad (5.15)$$

описывает соответствующее инвариантное преобразование. Матрица \tilde{R}_{KL} удовлетворяет условиям ортогональности:

$$\tilde{R}_{KL} \tilde{R}_{LN} = \delta_{KL}, \quad \det \{\tilde{R}_{KL}\} = \pm 1. \quad (5.16)$$

Возможность того, что детерминант матрицы \tilde{R}_{KL} может быть отрицательным, означает, что преобразование (5.15) кроме чистого вращения и трансляции содержит отражение в некоторой плоскости. Совокупность элементов

$$\tilde{\Gamma} : \{\tilde{R}_{KL}^{(1)}, \tilde{R}_{KL}^{(2)}, \dots, \tilde{R}_{KL}^{(n)}, \tilde{R}_K^{(1)}, \tilde{R}_K^{(2)}, \dots, \tilde{R}_K^{(m)}\}, \quad (5.17)$$

для которых при применении преобразования (5.15) симметрия материала не меняется, представляет собой группу преобразований, по отношению к которым материальная среда инвариантна.

Если каждый произвольно выбранный вектор \tilde{R}_K принадлежит группе (5.17), то соответствующий материал мы называем гомогенным (однородным). Если каждая произвольно выбранная ортогональная матрица \tilde{R}_{KL} принадлежит группе (5.17), соответствующий материал называем изотропным. Симметрия данного гомогенного материала определяется группой

$$\Gamma : \{\tilde{R}_{KL}^{(1)}, \tilde{R}_{KL}^{(2)}, \dots, \tilde{R}_{KL}^{(n)}\}. \quad (5.18)$$

В трехмерном пространстве существуют 15 матриц, с помощью которых можно реализовать произвольное дискретное преобразование вида (5.15) [120, 126]:

$$\mathbf{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1 \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_1 &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_3 \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{T}_1 &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{M}_1 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{S}_1 &\equiv \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 \equiv \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В зависимости от вида матриц материальной симметрии тела различаем 32 кристаллических класса, которые разделяются на 6 систем¹⁾:

6.1. Триклинная система $\Gamma^1: \{I\}$, $\Gamma^2: \{I, C\}$.

6.2. Моноклинная система

$\Gamma^3: \{I, R_1\}$, $\Gamma^4: \{I, D_1\}$, $\Gamma^5: \{I, C, R_1, D_1\}$.

6.3. Ромбическая система

$\Gamma^6: \{I, R_2, R_3, D_1\}$, $\Gamma^7: \{I, D_1, D_2, D_3\}$,

$\Gamma^8: \{I, C, R_1, R_2, R_3, D_1, D_2, D_3\}$.

6.4. Тетрагональная система

$\Gamma^9: \{I, D_3, D_1T_3, D_2T_3\}$,

$\Gamma^{10}: \{I, D_3, R_1T_3, R_2T_3\}$,

$\Gamma^{11}: \{I, C, R_3, D_3, R_1T_3, R_2T_3, D_1T_3, D_2T_3\}$,

$\Gamma^{12}: \{I, D_1, D_2, D_3, T_3, D_1T_3, D_2T_3, D_3T_3\}$,

$\Gamma^{13}: \{I, R_1, R_2, D_3, T_3, R_1T_3, R_2T_3, D_3T_3\}$,

$\Gamma^{14}: \{I, D_1, D_2, D_3, CT_3, R_1T_3, R_2T_3, R_3T_3\}$,

$\Gamma^{15}: \{I, C, R_1, R_2, R_3, D_1, D_2, D_3, T_3, CT_3, R_1T_3, R_2T_3, R_3T_3, D_1T_3, D_2T_3, D_3T_3\}$.

¹⁾ Согласно принятой в советской литературе классификации (см., например, [143*]), существуют 7 различных решеточных симметрий, или сиггоний; две из них — гексагональная и ромбоэдрическая — объединены здесь в гексагональную систему. — *Прим. перев.*

6.5. Кубическая система

$\Gamma^{16}: \{I, D_1, D_2, D_3, M_1, D_1M_1, D_2M_1, D_3M_1, M_2, D_1M_2, D_2M_2, D_3M_2\}$,

$\Gamma^{17}: \{I, C, R_1, R_2, R_3, D_1, D_2, D_3, M_1, CM_1, R_1M_1, R_2M_1, R_3M_1, D_1M_1, D_2M_2, D_3M_1, M_2, CM_2, R_1M_2, R_2M_2, R_3M_2, D_1M_2, D_2M_1, D_2M_2, D_3M_2\}$,

$\Gamma^{18}: \{I, D_1, D_2, D_3, T_1, D_1T_1, D_2T_1, D_3T_1, T_2, D_1T_2, D_2T_2, D_3T_2, T_3, D_1T_3, D_2T_3, D_3T_3, M_1, D_1M_1, D_2M_1, D_3M_1, M_2, D_1M_2, D_2M_2, D_3M_2\}$,

$\Gamma^{19}: \{I, D_1, D_2, D_3, CT_1, R_1T_1, R_2T_1, R_3T_1, CT_2, R_1T_2, R_2T_2, R_3T_2, CT_3, R_1T_3, R_2T_3, R_3T_3, M_1, D_1M_1, D_2M_1, D_3M_1, M_2, D_1M_2, D_2M_2, D_3M_2\}$,

$\Gamma^{20}: \{I, C, R_1, R_2, R_3, D_1, D_2, D_3, T_1, CT_1, R_1T_1, R_2T_1, R_3T_1, D_1T_1, D_2T_1, D_3T_1, T_2, CT_2, R_1T_2, R_2T_2, R_3T_2, D_1T_2, D_2T_2, D_3T_2, T_3, CT_3, R_1T_3, R_2T_3, R_3T_3, D_1T_3, D_2T_3, D_3T_3, M_1, CM_1, R_1M_1, R_2M_1, R_3M_1, D_1M_1, D_2M_1, D_3M_1, M_2, CM_2, R_1M_2, R_2M_2, R_3M_2, D_1M_2, D_2M_2, D_3M_2\}$.

6.6. Гексагональная система

$\Gamma^{21}: \{I, S_1, S_2\}$,

$\Gamma^{22}: \{I, S_1, S_2, C, CS_1, CS_2\}$,

$\Gamma^{23}: \{I, S_1, S_2, R_1, R_1S_1, R_1S_2\}$,

$\Gamma^{24}: \{I, S_1, S_2, D_1, D_1S_1, D_1S_2\}$,

$\Gamma^{25}: \{I, S_1, S_2, C, CS_1, CS_2, R_1, R_1S_1, R_1S_2, D_1, D_1S_1, D_1S_2\}$,

$\Gamma^{26}: \{I, S_1, S_2, R_3, R_3S_1, R_3S_2\}$,

$\Gamma^{27}: \{I, S_1, S_2, D_3, D_3S_1, D_3S_2\}$,

$\Gamma^{28}: \{I, S_1, S_2, C, CS_1, CS_2, R_3, R_3S_1, R_3S_2, D_3, D_3S_1, D_3S_2\}$,

$\Gamma^{29}: \{I, S_1, S_2, R_1, R_1S_1, R_1S_2, R_3, R_3S_1, R_3S_2, D_2, D_2S_1, D_2S_2\}$,

$\Gamma^{30}: \{I, S_1, S_2, D_1, D_1S_1, D_1S_2, D_2, D_2S_1, D_2S_2, D_3, D_3S_1, D_3S_2\}$,

$\Gamma^{31}: \{I, S_1, S_2, R_1, R_1S_1, R_1S_2, R_2, R_2S_1, R_2S_2, D_3, D_3S_1, D_3S_2\}$,

$\Gamma^{32}: \{I, S_1, S_2, C, CS_1, CS_2, R_1, R_1S_1, R_1S_2, R_2, R_2S_1, R_2S_2, R_3, R_3S_1, R_3S_2, D_1, D_1S_1, D_1S_2, D_2, D_2S_1, D_2S_2, D_3, D_3S_1, D_3S_2\}$.

Кроме перечисленных выше дискретных групп, с помощью которых описывается симметрия кристаллов, в трехмерном пространстве существуют две непрерывные группы:

группа произвольных вращений вокруг заданной оси

$$\Gamma^\alpha : \{R_{KL}^\alpha\} \equiv \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

где α — произвольное (действительное. — *Перев.*) число;

группа всех возможных ортогональных преобразований в трехмерном пространстве

$$\Gamma : \{R_{KL}\}, \quad R_{KL}R_{LM} = \delta_{KM}. \quad (5.20)$$

Тела, инвариантные по отношению к группе (5.19), будем называть трансверсально изотропными. Тела, инвариантные по отношению к группе (5.20), называем изотропными.

7. Принцип локальности был уже использован в разд. 4 при исследовании законов сохранения. Мы расширим область его применимости и на определяющие уравнения. Примем также, что значения активных переменных в окрестности любой точки определяются только значениями реактивных переменных в окрестности этой точки.

Принцип локальности не является абсолютно необходимым для построения термодинамики и механики сплошных сред. В последние годы ведется очень интенсивная работа по разработке нелокальных моделей, для построения которых принцип локальности не используется.

8. Согласно принципу затухающей памяти, более отдаленные в прошлом состояния термодинамической системы слабее влияют на значения активных и реактивных переменных в данный момент времени.

9. Согласно принципу допустимости, все предположения, связанные с определяющими уравнениями, должны находиться в соответствии с законами сохранения и ограничениями, следующими из второго начала термодинамики.

В заключение отметим, что вопрос о независимости определяющих принципов пока исследован далеко не полностью.