4. Законы сохранения

В рассматриваемой нами сплошной среде можно определить разные по своей физической природе поля. Под действием внешних или внутренних факторов они меняются во времени. Динамика протекающих изменений подчиняется законам сохранения, которые представляют собой фундаментальные законы природы. Наиболее часто используемые в механике сплошных сред законы сохранения связаны со следующими свойствами: с сохранением массы, с балансом количества движения, с балансом момента количества движения, с сохранением энергии, с балансом энтропии, с сохранением электрического заряда.

Наиболее общим образом законы сохранения для данного тела A можно представить интегралами по объему, которые имеют обычно следующий общий вид:

$$\int\limits_{V_A} \Phi\left(\mathbf{F}^{(1)}, \mathbf{F}^{(2)}, \ldots, \mathbf{F}^{(n)}, \frac{D}{Dt}\mathbf{F}^{(1)}, \frac{D}{Dt}\mathbf{F}^{(2)}, \ldots, \frac{D^m}{Dt^m}\mathbf{F}^{(1)}, \frac{D^m}{Dt^m}\mathbf{F}^{(2)}, \ldots, \frac{D^m}{Dt^m}\mathbf{F}^{(n)}\right) dV = 0, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{F}^{(l)}$ — величины различной тензорной размерности, определенные в области B.

Согласно принципу локальности, основные законы механики действительны не только для рассматриваемого тела, но и для каждой из его частей, какой бы малой она ни была. Из принципа локальности следует, что подынтегральная функция в интеграле (4.1) тождественно равна нулю:

$$\Phi\left(\mathbf{F}^{(1)}, \mathbf{F}^{(2)}, \ldots, \mathbf{F}^{(n)}, \frac{D}{Dt}\mathbf{F}^{(1)}, \frac{D}{Dt}\mathbf{F}^{(2)}, \ldots, \frac{D^m}{Dt^m}\mathbf{F}^{(1)}, \frac{D^m}{Dt^m}\mathbf{F}^{(2)}, \ldots, \frac{D^m}{Dt^m}\mathbf{F}^{(n)}\right) = 0. \tag{4.2}$$

Принцип локальности представляет собой некоторую идеализацию. В действительности рассматриваемый объем не может быть произвольно малым, так как для микрообъектов проявляются качественно новые свойства, которые несовместимы с классическими представлениями механики сплошных

сред. В последние годы интенсивно развиваются нелокальные модели деформируемых сред, в которых не используется принцип локальности.

4.1. Закон сохранения массы

С каждым телом связана определенная масса, которая является положительной и аддитивной величиной. Если $M(A)$ — масса тела A, а $M(B)$ — масса тела B, то масса составного тела равна[1])

$$M(A \cup B) = M(A) + M(B), \quad A \cap B = \varnothing. \tag{4.3}$$

Распределение массы в сплошном теле определяется плотностью массы

$$\rho(x, t) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{M(\Delta v)}{\Delta v}, \quad x \in \Delta v. \tag{4.4}$$

Согласно свойствам (4.3) и (4.4), массу данного тела A с объемом v можно представить интегралом

$$M(A) = \int\limits_{v} \rho(x_k, t)\, dv. \tag{4.5}$$

В соответствии с глобальной формулировкой закона сохранения массы при деформации данного тела его масса не меняется:

$$M(A) = \int\limits_{v} \rho(x_k, t)\, dv = \int\limits_{V} \rho_0(X_K, t_0)\, dV, \quad t \in [t_0, \infty). \tag{4.6}$$

Здесь через ρ_0 и V обозначены соответственно плотность массы и объем тела в начальный момент времени $t = t_0$.

С помощью преобразования (3.3) интеграл в левой части равенства (4.6) можно определить в области B; тогда для закона сохранения массы получаем

$$\int\limits_{V} [\rho(X_K, t) J - \rho_0(X_K, t_0)]\, dV = 0. \tag{4.7}$$

Из принципа локальности следует, что подынтегральная функция в (4.7) тождественно равна нулю:

$$\rho(X_K, t) J = \rho_0(X_K, t_0), \tag{4.8}$$

что является локальной формулировкой закона сохранения массы. Другую локальную формулировку этого закона можно получить, если подействовать на обе части равенства (4.8) оператором материальной производной и воспользоваться вы-

[1]) Здесь и далее релятивистские эффекты не рассматриваются. — *Прим. перев.*

ражением (3.11):

$$\frac{D}{Dt}\rho+\rho v_{k,k}=0. \tag{4.9}$$

Если в уравнении (4.9) функцию ρ снова задать в области b, то с помощью соотношения (3.12) приходим к новой локальной формулировке закона сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+(\rho v_k)_{,k}=0. \tag{4.10}$$

Обозначим через g плотность данной величины G, отнесенную к единице массы:

$$g=\lim_{\Delta M\to 0}\frac{G(\Delta M)}{\Delta M}. \tag{4.11}$$

Из закона сохранения массы следует тождество

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathrm{v}}\rho g\,d\mathrm{v}=\int_{\mathrm{v}}\rho\frac{D}{Dt}g\,d\mathrm{v}. \tag{4.12}$$

Для того чтобы доказать это утверждение, интеграл в левой части (4.12) следует задать в области B, а затем воспользоваться законом сохранения массы в формулировке (4.8) и снова вернуться в область b. При последовательном совершении этих действий получаем

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathrm{v}}\rho g\,d\mathrm{v}=\frac{D}{Dt}\int_{\mathrm{V}}J\rho g\,d\mathrm{V}=\int_{\mathrm{v}}\rho\frac{D}{Dt}g\,d\mathrm{v}. \tag{4.13}$$

4.2. Закон сохранения количества движения. Тензоры напряжений

Согласно второму закону классической механики, имеет место равенство

$$\frac{D}{Dt}P_k=F_k, \tag{4.14}$$

где

$$P_k=\int_{\mathrm{v}}\rho v_k\,d\mathrm{v} \tag{4.15}$$

есть количество движения тела, а F_k — сумма всех действующих на него сил.

Силы, которые действуют на данное тело, могут быть объемными или поверхностными. Объемные силы представляются в виде интегралов по объему рассматриваемого тела. Они включают дальнодействующие силы, которые действуют между частицами данного тела и частицами окружающих его других тел. Примером такого вида сил являются электромагнитные и гравитационные силы. Поверхностные силы представляются в виде интегралов по поверхности данного тела. Они включают в себя короткодействующие силы взаимодействия между частицами. По этой причине их называют также контактными силами. На основе сказанного выше результирующую силу F_k можно представить в виде

$$F_k=\int_s t_k^{(n)}\,|ds|+\int_{\mathrm{v}}\rho f_k\,d\mathrm{v}, \tag{4.16}$$

где через $t_k^{(n)}$ обозначена плотность поверхностных сил, действующих на элемент поверхности ds с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$. Через f_k обозначена плотность объемных сил, отнесенная к единице массы. Величины $t_k^{(n)}$ и f_k являются ограниченными и непрерывными функциями соответственно на поверхности и в объеме тела. Подставляя выражения (4.15) и (4.16) в (4.14) и используя (4.12), получаем

$$\int_{\mathrm{v}}\rho\frac{D}{Dt}v_k\,d\mathrm{v}=$$

$$=\int_s t_k^{(n)}\,|ds|+\int_{\mathrm{v}}\rho f_k\,d\mathrm{v}. \tag{4.17}$$

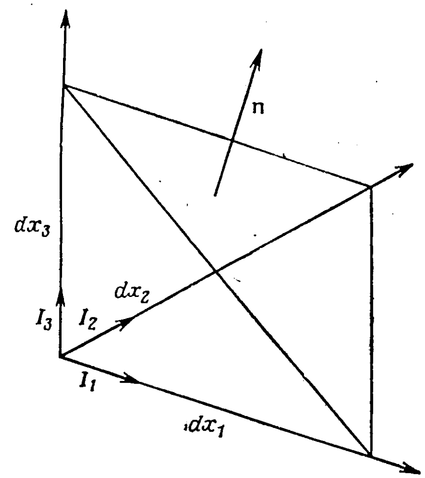

Рис. 3.

Рассмотрим элементарный тетраэдр (рис.3), три ребра которого параллельны координатным осям и имеют длины Δx_1, Δx_2, Δx_3. Через $\Delta s_1=\Delta x_2\Delta x_3$, $\Delta s_2=\Delta x_3\Delta x_1$, $\Delta s_3=\Delta x_1\Delta x_2$ обозначим площади граней тетраэдра, которые перпендикулярны соответственно базисным векторам $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$, а через $\Delta\mathbf{s}=|\Delta\mathbf{s}|\mathbf{n}$ обозначим вектор площади четвертой грани, которая лежит на поверхности, пересекающей три координатные оси. Допустим, что вектор $\mathbf{n}$ ориентирован наружу, так что между $\Delta\mathbf{s}$ и Δs_k существует связь

$$\Delta\mathbf{s}=\Delta s_1\mathbf{i}_1+\Delta s_2\mathbf{i}_2+\Delta s_3\mathbf{i}_3. \tag{4.18}$$

С помощью теоремы о среднем значении из соотношения (4.17) получаем

$$\left(\rho\frac{D}{Dt}v_k-\rho f_k\right)\Big|_{\xi}\Delta\mathrm{v}=t_k^{(n)}(\zeta)\,|\Delta\mathbf{s}|-t_k^{(1)}(\zeta_1)\,\Delta s_1-$$

$$-t_k^{(2)}(\zeta_2)\,\Delta s_2-t_k^{(3)}(\zeta_3)\,\Delta s_3, \tag{4.19}$$

где $\xi\in\Delta\mathrm{v}$, $\zeta\in\Delta s$, $\zeta_1\in\Delta s_1$, $\zeta_2\in\Delta s_2$, $\zeta_3\in\Delta s_3$.

Когда размеры тетраэдра стремятся к нулю, отношение $\Delta v/|\Delta s|$ также стремится к нулю, откуда следует, что поверхностные силы находятся в равновесии:

$$t_k^{(n)}|ds|=t_k^{(1)}ds_1+t_k^{(2)}ds_2+t_k^{(3)}ds_3. \tag{4.20}$$

Если мы положим $t_{lk}=t_k^{(l)}$ и используем соотношение (4.18), то уравнение (4.20) можно представить в виде

$$t_k^{(n)}=t_{lk}n_l. \tag{4.21}$$

Величина t_{lk} представляет собой тензор напряжений Коши.

С помощью равенства (4.20) закон сохранения количества движения можно представить уравнением

$$\int_V \rho \frac{D}{Dt} v_k\, dv=\int_S t_{lk}\, ds_l+\int_V \rho f_k\, dv. \tag{4.22}$$

С помощью теоремы Гаусса — Остроградского интеграл по поверхности в уравнении (4.22) преобразуется в интеграл по объему:

$$\int_V \left[\rho\left(\frac{D}{Dt} v_k-f_k\right)-t_{lk,\,l}\right] dv=0. \tag{4.23}$$

Из принципа локальности следует, что подынтегральная функция в соотношении (4.23) тождественно равна нулю:

$$\rho\left(\frac{D}{Dt} v_k-f_k\right)-t_{lk,\,l}=0. \tag{4.24}$$

Это уравнение представляет собой локальную формулировку закона сохранения количества движения.

Уравнение (4.24) вместе с другими уравнениями используется при решении различных граничных задач. Поверхность дефромированного тела, на которой задаются граничные условия, иногда неизвестна и является тогда частью искомого решения. Потому определенную пользу иногда приносит переформулировка граничной задачи с области b на область B; при этом граничные условия переносятся с поверхности s деформированного тела на поверхность S недеформированного тела.

При деформации тела каждый материальный элемент поверхности dS_K преобразуется в пространственный элемент поверхности ds_k. Связь между dS_K и ds_k задается соотношениями [135]

$$ds_k=JX_{K,\,k}\,dS_K,\quad dS_K=J^{-1}x_{k,\,K}\,ds_k. \tag{4.25}$$

После перехода в уравнении (4.22) от области b к области B с помощью (4.8) и (4.25) получаем следующую глобальную формулировку закона сохранения количества движения:

$$\int_V \rho_0 \frac{D}{Dt} v_k\, dV=\int_S T_{Kk}\, dS_K+\int_V \rho_0 f_k\, dV, \tag{4.26}$$

где

$$T_{Kk}=Jt_{kl}X_{K,\,l} \tag{4.27}$$

есть первый тензор напряжений Пиолы. Локальная формулировка закона сохранения количества движения в области B задается уравнением

$$\rho_0 \frac{D}{Dt} v_k=T_{Kk,\,K}+\rho_0 f_k. \tag{4.28}$$

Здесь T_{Kk} не является истинным тензором, так как его тензорные индексы принадлежат разным координатным системам. Иногда удобнее работать со вторым тензором напряжений Пиолы, который определяется равенством

$$T_{KL}=T_{Kk}X_{L,\,k} \tag{4.29}$$

и представляет собой истинный тензор, поскольку оба его тензорных индекса принадлежат материальной системе координат.

При формулировке закона сохранения количества движения не были учтены внутренние степени свободы. Причина заключается в том, что микродвижение рассматривается по отношению к координатной системе, неподвижно связанной с центром тяжести элементарного объема dv, а, как известно, количество движения механической системы в системе центра тяжести равно нулю.

4.3. Закон сохранения момента количества движения

В соответствии с законом сохранения момента количества движения имеет место равенство

$$\frac{D}{Dt} B_k=N_k, \tag{4.30}$$

где B_k — момент количества движения, а N_k — сумма всех действующих моментов сил. В случае микрополярных тел B_k — сумма момента количества движения, связанного с макроскопическим и микроскопическим движением:

$$B_k=\int_V \rho e_{klm}x_l v_m\, dv+\int_V J_{kl}\frac{D}{Dt}\varphi_l\, dv. \tag{4.31}$$

В выражении (4.31) величина

$$J_{kl}=\sum_\alpha \rho\left(\xi_m^{(\alpha)}\xi_m^{(\alpha)}\delta_{kl}-\xi_k^{(\alpha)}\xi_l^{(\alpha)}\right) \tag{4.32}$$

представляет собой тензор микроинерции, который определяется геометрией компонент. Чаще всего в микрополярной теории используется модель микроэлементов, имеющих вид палочек, для которых

$$J_{kl} = \rho r^2 \delta_{kl}, \tag{4.33}$$

где r — инерционный радиус микроэлементов.

Величина N_k представляет собой сумму момента поверхностных сил

$$N_k^{(1)} = \int_s e_{klm} x_l t_{nm}\, ds_n, \tag{4.34}$$

момента объемных сил

$$N_k^{(2)} = \int_V e_{klm} x_l \rho f_m\, dV, \tag{4.35}$$

моментов, распределенных на поверхности,

$$N_k^{(3)} = \int_s M_k^{(n)} |ds| \tag{4.36}$$

и моментов, распределенных в объеме,

$$N_k^{(4)} = \int_V \rho l_k\, dV. \tag{4.37}$$

Величина $M_k^{(n)}$ в выражении (4.36) представляет собой поверхностный момент, действующий на единичный элемент поверхности с вектором нормали $\mathbf{n}$, а l_k — плотность объемного момента, отнесенная к единице массы.

Аналогично тому как были определены тензоры напряжений, здесь можно ввести соответственно тензор момента Коши m_{kl}, первый тензор момента Пиолы M_{Kk} и второй тензор момента Пиолы M_{KL}.

С помощью введенных величин закон сохранения момента количества движения может быть выражен в следующей глобальной формулировке:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\left(e_{klm} x_l v_m + r^2 \frac{D}{Dt}\varphi_k\right) dV = \int_s (e_{klm} x_l t_{nm} + m_{nk})\, ds_n + \int_V \rho\,(e_{klm} x_l f_m + l_k)\, dV. \tag{4.38}$$

Используя в соотношении (4.38) теорему Гаусса — Остроградского и закон сохранения количества движения (4.23), получаем

$$\int_V \left(\rho r^2 \frac{D^2}{Dt^2}\varphi_k - m_{lk,l} - e_{klm} t_{lm} - \rho l_k\right) dV = 0. \tag{4.39}$$

Локальная формулировка закона сохранения момента количества движения, которая следует из принципа локальности и из глобального уравнения (4.39), имеет вид

$$\rho r^2 \frac{D^2}{Dt^2}\varphi_k = m_{lk,l} + e_{klm} t_{lm} + \rho l_k. \tag{4.40}$$

В классической теории сплошных сред предполагают, что $r^2 = m_{kl} = l_k = 0$; это приводит к симметричности тензора напряжения Коши:

$$e_{klm} t_{lm} = 0 \Rightarrow t_{lk} = t_{kl}. \tag{4.41}$$

4.4. Закон сохранения энергии. Первое начало термодинамики

В силу закона сохранения энергии, который является и первым началом термодинамики, скорость изменения полной энергии E определяется мощностью внешних сил W и количеством тепла Q, получаемым телом за единицу времени:

$$\frac{D}{Dt} E = W + Q. \tag{4.42}$$

Полная энергия представляет собой сумму кинетической энергии

$$K = \int_V \frac{1}{2}\rho\,(v_k v_k + r^2 \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_k)\, dV \tag{4.43}$$

и внутренней энергии

$$U = \int_V \rho e\, dV, \tag{4.44}$$

где e — плотность внутренней энергии.

Мощность внешних сил W представляет собой работу, которую совершают за единицу времени поверхностные силы

$$W^{(1)} = \int_V t_{lk} v_k\, ds_l, \tag{4.45}$$

объемные силы

$$W^{(2)} = \int_V \rho f_k v_k\, dV, \tag{4.46}$$

поверхностные моменты

$$W^{(3)} = \int_s m_{kl} \frac{D}{Dt}\varphi_l\, ds_k \tag{4.47}$$

и объемные моменты

$$W^{(4)} = \int_V \rho l_k \frac{D}{Dt}\varphi_k\, dV. \tag{4.48}$$

Количество тепла, которое тело получает за единицу времени, представляет собой сумму двух частей — тепла, полученного при контактном взаимодействии с другими телами

$$Q^{(1)} = \int_s h_k\,ds_k, \tag{4.49}$$

которое характеризуется плотностью потока тепла h_k, и тепла, полученного при объемном взаимодействии с другими телами

$$Q^{(2)} = \int_v \rho\overset{*}{e}\,dv, \tag{4.50}$$

которое характеризуется плотностью тепловых источников $\overset{*}{e}$. Примером объемного теплового взаимодействия является тепловое излучение.

Из соотношений (4.42)—(4.50) следует уравнение

$$\frac{D}{Dt}\int_v \frac{1}{2}\rho\,(v_k v_k + r^2\dot{\varphi}_k\dot{\varphi}_k + e)\,dv = \int_s (t_{lk}v_k + m_{lk}\dot{\varphi}_k + h_l)\,ds_l + \\ + \int_v \rho\left(f_k v_k + l_k\dot{\varphi}_k + \overset{*}{e}\right)dv. \tag{4.51}$$

Преобразуя поверхностные интегралы в уравнении (4.51) в объемные с помощью теоремы Гаусса — Остроградского и используя принцип локальности, приходим к уравнению

$$v_k\left(\rho\frac{D}{Dt}v_k - t_{lk,\,l} - \rho f_k\right) + \dot{\varphi}_k\,(\rho r^2\ddot{\varphi}_k - m_{lk,\,l} - \rho l_k - \\ - e_{klm}t_{lm}) + \rho\frac{D}{Dt}e = t_{kl}\,(v_{l,\,k} - e_{mkl}\dot{\varphi}_m) + m_{kl}\dot{\varphi}_{l,\,k} + h_{k,\,k} + \rho\overset{*}{e}. \tag{4.52}$$

Из закона сохранения количества движения и закона сохранения момента количества движения следует, что выражения в скобках в левой части уравнения (4.52) тождественно равны нулю. Следовательно, локальную формулировку закона сохранения энергии можно представить с помощью уравнения

$$\rho\frac{D}{Dt}e = t_{kl}\tilde{d}_{lk} + m_{kl}\dot{\varphi}_{l,\,k} + h_{k,\,k} + \rho\overset{*}{e}, \tag{4.53}$$

где

$$\tilde{d}_{lk} = v_{l,\,k} - e_{mkl}\dot{\varphi}_m. \tag{4.54}$$

При малых деформациях имеем

$$\tilde{d}_{lk} = \frac{D}{Dt}\tilde{\varepsilon}_{lk}, \tag{4.55}$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{lk} = u_{l,\,k} - e_{mkl}\varphi_m \tag{4.56}$$

представляет собой тензор бесконечно малой микрополярной деформации.

Если предположить, что в рассматриваемой среде не действуют поверхностные и объемные моменты, $m_{kl} = l_k = 0$, и пространственное микровращение совпадает с макровращением:

$$\frac{D}{Dt}\varphi_k = \frac{1}{2}e_{klm}v_{l,\,m}, \tag{4.57}$$

то из (4.53) следует классическая локальная формулировка закона сохранения энергии

$$\rho\frac{D}{Dt}e = t_{kl}v_{l,\,k} + h_{k,\,k} + \rho\overset{*}{e}. \tag{4.58}$$

С помощью определения тензора конечной деформации Грина (3.27) и условия симметричности тензора напряжения (4.41) в случае неполярной среды получаем следующую локальную формулировку закона сохранения энергии:

$$\rho\frac{D}{Dt}e = \frac{1}{2}t_{kl}X_{K,\,k}X_{L,\,l}\frac{D}{Dt}C_{KL} + h_{k,\,k} + \rho\overset{*}{e} \tag{4.59}$$

Закон сохранения энергии можно записать и в материальной системе координат. В этом случае

$$\rho_0\frac{D}{Dt}e = \frac{1}{2}T_{KL}\frac{D}{Dt}C_{KL} + h_{K,\,K} + \rho_0\overset{*}{e}, \tag{4.60}$$

где

$$h_K = Jh_kX_{K,\,k} \tag{4.61}$$

есть тепловой поток, связанный с материальной поверхностью тела.

4.5. Баланс энтропии

4.5.1. Локально-равновесная энтропия

Согласно локальной формулировке (4.59) закона сохранения энергии, для неполярного тела имеет место уравнение

$$de - \frac{1}{2\rho_0}T_{KL}\,dC_{KL} = \delta Q, \tag{4.62}$$

где

$$de = \frac{D}{Dt}e\,dt, \quad dC_{KL} = \frac{D}{Dt}C_{KL}\,dt,$$

$$\delta Q = \left(\frac{1}{\rho_0}h_{K,\,K} + \overset{*}{e}\right)dt, \tag{4.63}$$

представляют собой соответственно изменение плотности внутренней энергии, изменение тензора деформации Грина и количество тепла, полученное единицей массы за бесконечно малый интервал времени dt.

Рассматриваемую локальную систему, заключенную в объем $d\mathrm{v}$, будем называть локально-равновесной, если тензор напряжения Пиолы зависит только от мгновенных значений плотности внутренней энергии и тензора деформации Грина:

$$T_{KL}=T_{KL}(e, C_{MN}). \qquad (4.64)$$

При сделанном предположении (4.64) выражение (4.62) представляет собой пфаффову форму в переменных e и C_{KL}. Как хорошо известно, пфаффова форма допускает существование интегрирующего множителя (разд. 1.3.5). Следовательно, имеет место уравнение

$$d\eta=\frac{de}{\theta}-\frac{1}{2\rho_0\theta}T_{KL}\,dC_{KL}, \qquad (4.65)$$

где θ^{-1} — интегрирующий множитель, а η — новая функция, определяемая уравнением

$$d\eta=\delta Q/\theta, \qquad (4.66)$$

которая называется плотностью локально-равновесной энтропии. Интегрирующий множитель θ^{-1} представляет собой величину, обратную абсолютной температуре. Согласно второму началу термодинамики, $\theta>0$.

Так как $d\eta$ является полным дифференциалом, то имеют место равенства

$$\frac{1}{\theta}=\frac{\partial\eta}{\partial e}, \quad T_{KL}=-2\rho_0\theta\frac{\partial\eta}{\partial C_{KL}}, \quad \frac{\partial}{\partial C_{KL}}\left(\frac{1}{\theta}\right)=-\frac{\partial}{\partial e}T_{KL}. \qquad (4.67)$$

4.5.2. Локально-неравновесная энтропия. Неравенство Клаузиуса — Дюгема

Существуют различные формулировки второго начала термодинамики, которые предлагались в разные периоды развития неравновесной термодинамики. Они отличаются друг от друга не только своей общностью, но и своими основными предпосылками. В последние 20 лет большой популярностью пользуется неравенство Клаузиуса — Дюгема

$$\rho\frac{D}{Dt}\eta-\left(\frac{h_k}{\theta}\right)_{,k}-\frac{\rho\overset{*}{e}}{\theta}\geqslant 0, \qquad (4.68)$$

которое в качестве формулировки второго начала термодинамики было впервые использовано в 1963 г. Коулменом и Ноллом при исследовании определяющих уравнений термовязкоупругих сред [39]. Этим они положили начало современному термодинамическому подходу к механике сплошных сред. Обобщение неравенства Клаузиуса — Дюгема на нелокальные среды проведено Грином и Лоусом [68]. Гуртин

и Билльямс [69] предлагают использовать две различные температуры θ и $\tilde{\theta}$:

$$\rho\frac{D}{Dt}\eta-\left(\frac{h_k}{\theta}\right)_{,k}-\frac{\overset{*}{e}}{\tilde{\theta}}\geqslant 0, \qquad (4.69)$$

где $\tilde{\theta}$ — новая температура, названная ими радиационной.

Мюллер [103] предлагает вместо (4.69) использовать неравенство

$$\rho\frac{D}{Dt}\eta-\mathcal{F}^{\eta}_{k,k}+\frac{\rho\overset{*}{e}}{\theta}\geqslant 0, \qquad (4.70)$$

где $\mathcal{F}^{\eta}_{k}$ — поток энтропии, который только в случае простых материалов (разд. 4) сводится к

$$\mathcal{F}^{\eta}_{k}=h_k/\theta, \qquad (4.71)$$

Для того чтобы изложить предпосылки, с помощью которых можно прийти к неравенству Клаузиуса — Дюгема и его обобщениям, рассмотрим экстенсивную величину G (через g обозначим ее плотность, отнесенную к единице массы):

$$G=\int_{\mathrm{v}}\rho g\,d\mathrm{v}. \qquad (4.72)$$

В наиболее общем виде баланс величины G в объеме v можно представить уравнением

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathrm{v}}\rho g\,d\mathrm{v}=\int_{s}\mathcal{F}^{g}_{k}\,ds_k+\int_{\mathrm{v}}\rho\overset{*}{g}\,d\mathrm{v}+\int_{\mathrm{v}}\rho\gamma^{g}\,d\mathrm{v}, \qquad (4.73)$$

где $\mathcal{F}^{g}_{k}$ — поток величины G через окружающую объем v поверхность s. Наличие потока является результатом контактного взаимодействия между объемом v и окружающими его телами. Это взаимодействие может быть и объемным. Примером является радиация, которая излучается одним телом и поглощается в объеме других тел. При локализации частиц радиации и фотонов света в теле появляются объемные источники энергии и энтропии. Они являются результатом взаимодействия между поглощающим и излучающим телами. Эффект объемного взаимодействия тела объема v с окружающими его телами учитывается величиной $\overset{*}{g}$. Последний член в правой части уравнения (4.73) представляет собой количество величины G, которое порождается в единицу времени в исследуемом объеме в результате внутренних взаимодействий. Через γ^{g} обозначена плотность внутренних источников величины G.

Если использовать уравнение (4.73) для изучения баланса энтропии, то с помощью теоремы Гаусса-Остроградского и принципа локальности получаем

$$\rho \frac{D}{Dt}\eta - \mathcal{J}^{\eta}_{k,\,k} - \rho\dot{\eta} = \rho\gamma^{\eta}. \tag{4.74}$$

Классическая формулировка неравенства Клаузиуса — Дюгема получается из уравнения (4.74) с помощью следующих предположений:

1. Поток энтропии пропорционален потоку тепла:

$$\mathcal{J}^{\eta}_{m} = \mathrm{k} h_m. \tag{4.75}$$

2. Плотность источников энтропии пропорциональна плотности источников тепла:

$$\dot{\eta} = \mathrm{k}\dot{e}. \tag{4.76}$$

3. Коэффициент пропорциональности k в уравнениях (4.75) и (4.76) — положительная величина. Его обратное значение

$$\theta = \frac{1}{\mathrm{k}} > 0 \tag{4.77}$$

называется абсолютной температурой.

4. Порождаемая в теле энтропия является неотрицательной величиной:

$$\gamma^{\eta} \geqslant 0. \tag{4.78}$$

Эти четыре предположения представляют неравновесную формулировку второго начала термодинамики. Последующие обобщения могут быть получены либо с помощью отказа от какого-то из этих предположений, либо заменой его более общим утверждением. Так, например, линейную связь между потоками энтропии и тепла (4.75) можно заменить нелинейной связью. Можно также предположить, что связь между этими двумя потоками является связью интегрального типа с запаздывающим ядром. Разумеется, обобщения подобного типа имеют смысл только в том случае, если это необходимо для описания экспериментальных результатов.

Неравенство Клаузиуса — Дюгема расширяет формулировку второго начала термодинамики не только для локально-неравновесных состояний, но и для локально-равновесных. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим ограничения, которые следуют из этого неравенства при локальном равновесии. С помощью соотношения (4.63) неравенство (4.68) можно представить в виде

$$\rho\theta\gamma^{\eta} = \rho\theta \frac{D}{Dt}\eta - \frac{\delta Q}{dt} + \frac{\theta_{,k} h_k}{\theta} \geqslant 0. \tag{4.79}$$

Из условия локального равновесия (4.66) и из выражения (4.79) получаем

$$\rho\gamma^{\eta}\theta = \theta_{,k} h_k \geqslant 0.$$

Отсюда видно, что даже тогда, когда в теле существует локальное равновесие, в нем продолжает генерироваться неравновесная энтропия. Причина состоит в контактном тепловом взаимодействии между элементарными объемами. Следовательно, достаточным условием существования глобального равновесия в локально-равновесной среде является равенство нулю градиента температуры. Неравенство (4.80) выражает хорошо известный факт, заключающийся в том, что поток тепла и градиент температуры имеют один и тот же знак, т. е. тепло «течет» от более теплой к более холодной области.

Другое представление второго начала термодинамики можно получить, исключая из выражения (4.79) производную $\delta Q/dt$ с помощью локальной формулировки закона сохранения энергии:

$$\rho \frac{D}{Dt} e - \rho\theta \frac{D}{Dt}\eta - \frac{1}{2} t_{kl} X_{K,\,k} X_{L,\,l} \frac{D}{Dt} C_{KL} - \frac{\theta_{,k} h_k}{\theta} \leqslant 0. \tag{4.81}$$

Если ввести величину

$$\psi = e - \theta\eta, \tag{4.82}$$

которая представляет собой плотность свободной энергии, неравенство (4.81) можно представить в виде

$$\rho \frac{D}{Dt}\psi + \rho\eta \frac{D}{Dt}\theta - \frac{1}{2} t_{kl} X_{K,\,k} X_{L,\,l} \frac{D}{Dt} C_{KL} - \frac{\theta_{,k} h_k}{\theta} \leqslant 0. \tag{4.83}$$